

فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد

درس اول: استدلال ریاضی

پویش علمی
ماندگار البرز

مثال نقض و اثبات به روش مستقیم

(۱) هر یک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

الف) اگر برای سه مجموعه A ، B و C داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$ ، آنگاه $B = C$.

$$\begin{array}{l} A = \{1, 2\} \\ B = \{1\} \\ C = \{2\} \end{array} \rightarrow \begin{cases} A \cup B = A \cup C = \{1, 2\} \\ B \neq C \end{cases}$$

نادرست و مثال نقض آن:

ب) اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است.

$$(k = 2 \times 3 = 6 \rightarrow 4k + 1 = 25)$$

درست و اثبات آن:

$$k = n(n+1) \rightarrow 4k + 1 = 4n(n+1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$$



اثبات با در نظر گرفتن تمام حالت‌ها

(۲) ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، عبارت $n^2 - 9n + 1$ همواره عددی فرد است.پویش علمی
ماندگار البرز

$$n \in \mathbb{N} \rightarrow \begin{cases} \text{زوج } n \rightarrow n = 2k \rightarrow n^2 - 9n + 1 = (2k)^2 - 9(2k) + 1 = 4k^2 - 18k + 1 = 2(2k^2 - 9k) + 1 = 2k' + 1 \\ \text{فرد } n \rightarrow n = 2k + 1 \rightarrow n^2 - 9n + 1 = (2k + 1)^2 - 9(2k + 1) + 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 18k - 9 + 1 \\ = 4k^2 - 14k - 7 = 4k^2 - 12k - 8 - 2k - 7 + 1 = 4k^2 - 12k - 8 - 2k - 6 + 1 = 4k^2 - 14k - 7 + 1 = 4k^2 - 14k - 6 = 2(2k^2 - 7k - 3) + 1 = 2k' + 1 \end{cases}$$

(۳) ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ ، آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$.

$$a \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \rightarrow \text{حکم اثبات شده است} \\ a \neq 0 \rightarrow ab = 0 \xrightarrow{\times \frac{1}{a}} \frac{1}{a} \times ab = 0 \times \frac{1}{a} \rightarrow b = 0 \end{cases}$$

اثبات غیر مستقیم (برهان خلف)

پویش علمی
ماندگار البرز

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

۴) اگر α و β دو عدد گنگ باشند و $\alpha + \beta$ عددی گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - 2\beta$ عددی گنگ است.

فرض

اثبات = (برهان خلف) : فرض کنیم حکم نادرست باشد پس $\alpha - 2\beta$ گویا است و:

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha - 2\beta = \frac{a}{b} ; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 & \textcircled{1} \\ \alpha + \beta \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{c}{d} ; c, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \Rightarrow 3\beta = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd}$$

$$\xrightarrow{\div 3} \beta = \frac{bc - ad}{3bd} \quad \frac{a, b, c, d \in \mathbb{Z}}{b, d \neq 0} \Rightarrow \beta \in \mathbb{Q}$$

و این تناقض با فرض $\beta \in \mathbb{Q}'$ است. پس حکم نادرست است.

۵) a_3, a_2, a_1 اعدادی صحیح هستند و b_3, b_2, b_1 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید که عدد

$$2, 3, 7 \xrightarrow{+} 12$$

$$3, 7, 2 \xrightarrow{+} 12$$

$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.

کم

اثبات (برهان خلف): فرض کنیم حکم می‌دهند درست باشد:

$$\frac{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)}{m \times n \times p} \rightarrow \begin{cases} a_1 - b_1 : \text{ عدد فرد} \\ a_2 - b_2 : \text{ عدد زوج} \\ a_3 - b_3 : \text{ عدد زوج} \end{cases} \rightarrow (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) = \text{ عدد فرد}$$

$$\rightarrow (a_1 + a_2 + a_3) - (b_1 + b_2 + b_3) = \text{ عدد فرد} \rightarrow 0 = \text{ عدد فرد}$$

و تناقض آشکار است، زیرا یک عدد زوج است، پس حکم می‌دهند درست است.



پویش علمی
ماندگار البرز



اثبات بازگشتی

۶) به روش بازگشتی ثابت کنید که برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1)$



پویش علمی
ماندگار البرز

$$y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1) \Leftrightarrow y^2 + 1 \geq -2xy - 2x^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 1}_{x^2 + x^2} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 2xy) + (x^2 + 2x + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 + (x + 1)^2 \geq 0 \quad (\text{بدیهی است})$$



(۷) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید که $a^2 + ab + b^2 \geq 0$.

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0 \xrightarrow[\div 2]{\times 2} \underbrace{2a^2 + 2ab}_{a^2 + a^2} + \underbrace{2b^2}_{b^2 + b^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 + b^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 + (a^2 + b^2) \geq 0 \quad (\text{بهمی است})$$



پویش علمی
ماندگار البرز



درس دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

$$(a, b, c, d, m, n \in \mathbb{Z})$$

$$a|b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} ; b = ak$$

$$۱) a|b \Rightarrow a|mb$$

$$۲) a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$$

$$۳) a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$$

$$۴) a|b \wedge b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$$

$$۵) a|b \Rightarrow a^n | b^n$$

$$۶) a|b \wedge c|d \Rightarrow ac|bd$$

$$۷) a|b \wedge a|c \Rightarrow a|mb \pm nc$$

$$۲|۶ \longrightarrow ۲|۴ \times ۶$$

(تعدی)

عاد کردن و ویژگی‌های آن

پویش علمی
ماندگار البرز

۸) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $a|b$ ، ثابت کنید که $a^n|b^n$.

$$a|b \Rightarrow b = ak \quad (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{توان } n} b^n = (ak)^n$$

$$\Rightarrow b^n = a^n \times k^n \Rightarrow b^n = a^n \times k' \Rightarrow a^n|b^n.$$



پویش علمی
ماندگار البرز



۱۹ اگر k عددی صحیح باشد به طوری که $۴ \mid ۳k + ۱$ ، ثابت کنید $۱۶ \mid ۹k^۲ + ۱۸k + ۵$.

$$\left\{ \begin{array}{l} ۴ \mid ۳k + ۱ \xRightarrow{\text{توان}^۲} ۴^۲ \mid (۳k + ۱)^۲ \Rightarrow ۱۶ \mid ۹k^۲ + ۹k + ۱ \\ ۴ \mid ۳k + ۱ \xRightarrow{\times ۴} ۴ \times ۴ \mid ۴(۳k + ۱) \Rightarrow ۱۶ \mid ۱۲k + ۴ \end{array} \right. \quad \textcircled{+}$$

$$۱۶ \mid (۹k^۲ + ۹k + ۱) + (۱۲k + ۴) \Rightarrow ۱۶ \mid ۹k^۲ + ۱۸k + ۵$$



پویش علمی
ماندگار البرز



۱۰. اگر a عددی اول باشد و $a \mid 5k - 1$ و $a \mid 4k + 3$ ، آنگاه مقدار a را پیدا کنید.

$$\begin{cases} a \mid 5k - 1 \xrightarrow{\times 4} a \mid 4(5k - 1) \rightarrow a \mid 20k - 4 \quad \ominus \\ a \mid 4k + 3 \xrightarrow{\times 5} a \mid 5(4k + 3) \rightarrow a \mid 20k + 15 \end{cases}$$

$$a \mid (20k + 15) - (20k - 4) \Rightarrow a \mid 19 \Rightarrow a = \pm 1 \vee a = \pm 19$$

$$\xrightarrow[\text{اول}]{a \text{ عددی}} a = 19$$



پویش علمی
ماندگار البرز



ب.م.م و ک.م.م

$$a|b \Rightarrow (a,b)=a, [a,b]=b$$

$$(ka,kb)=|k|(a,b), [ka,kb]=|k|[a,b]$$

۱۱) فرض کنید a یک عددی طبیعی فرد باشد، حاصل $([a^2, a^5], 2a^3)$ را به دست آورید.

$$a^2|a^5 \Rightarrow [a^2, a^5] = a^5 \Rightarrow \left(\underbrace{[a^2, a^5]}_{a^5}, 2a^3 \right) = (a^5, 2a^3) = a^3$$

پویش علمی
ماندگار البرز

$$\begin{array}{r} a \overline{) b} \\ q \\ \hline r \end{array}$$

$$\rightarrow a = bq + r \quad ; \quad r \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$$

$$a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a = bq + r; r, q \in \mathbb{Z}, 0 \leq r \leq b-1$$

قضیه تقسیم

پویش علمی
ماندگار البرز

(۱۲) اگر باقی‌مانده تقسیم a و b بر ۲۳ به ترتیب ۶ و ۷ باشد، باقی‌مانده تقسیم $3a - 5b$ بر ۲۳ را به دست آورید.

$$\begin{cases} a = 23q + 6 \xrightarrow{\times 3} 3a = 69q + 18 \\ b = 23q' + 7 \xrightarrow{\times 5} 5b = 115q' + 35 \end{cases} \quad \ominus$$

$$3a - 5b = 69q - 115q' + 18 - 35 \Rightarrow 3a - 5b = 23(\underbrace{3q - 5q'}_{q''}) - 17 \Rightarrow$$

$$3a - 5b = 23q'' - 17 = \underbrace{23q'' - 23}_{q_1} + 6 = 23(q_1 + 1) + 6 \Rightarrow$$

باقیمانده $q = 6$



افراز اعداد صحیح به کمک قضیه تقسیم

(۱۳) اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a ، $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش پذیر است.



$$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} a = 3k \Rightarrow a \text{ مضرب ۳ است} \\ a = 3k + 1 \xrightarrow{+2} a+2 = 3k+3 = 3(k+1) \Rightarrow (a+2) \text{ مضرب ۳ است} \\ a = 3k + 2 \xrightarrow{+4} a+4 = 3k+6 = 3(k+2) \Rightarrow (a+4) \text{ مضرب ۳ است} \end{cases}$$

درس سوم: هم‌نهمی در اعداد صحیح

کلاس یا دسته هم‌نهمی

به مجموعه اعداد صحیحی که بر عدد طبیعی m باقی‌مانده r دارند، **کلاس** یا **دسته هم‌نهمی** r به پیمانه m می‌گوییم و با نماد $[r]_m$ نشان می‌دهیم.

$$[r]_m = \{ \dots, r - 2m, r - m, \underbrace{r}_{\begin{smallmatrix} -m \\ +m \end{smallmatrix}}, r + m, r + 2m, \dots \}$$

۱۴) عدد ۱۴۰۵ به کدام دسته هم‌نهمی به پیمانه ۹ تعلق دارد؟

$$\begin{array}{r} 1405 \div 9 \\ 9 \overline{) 1405} \\ \underline{9} \\ 50 \\ \underline{45} \\ 50 \\ \underline{45} \\ 5 \\ \underline{0} \\ 5 \\ \underline{0} \\ 5 \end{array}$$

۱۴۰۵ به کلاس ۱ در پیمانه ۹ تعلق دارد، یعنی:

$$\Rightarrow 1405 \in [1]_9$$



پویش علمی
ماندگار البرز



تعریف هم‌نهشتی و ویژگی‌های آن

$$(m = n) = P$$

$$(c = d)$$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv^m b \Leftrightarrow m | a - b \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$1) a \equiv^m a$$

$$2) a \equiv^m b \Leftrightarrow b \equiv^m a$$

$$3) a \equiv^m b, b \equiv^m c \Rightarrow a \equiv^m c$$

$$4) a \equiv^m b \Leftrightarrow a \pm c \equiv^m b \pm c$$

$$5) a \equiv^m b \Rightarrow ac \equiv^m bc$$

$$6) a \equiv^m b \Rightarrow a^n \equiv^m b^n$$

$$7) a \equiv^m b, c \equiv^m d \Rightarrow ac \equiv^m bd, a \pm c \equiv^m b \pm d$$

$$8) a \equiv^m b \Rightarrow a \pm mt \equiv^m b \pm mk$$

$$a \equiv^m b \Leftrightarrow m | a - b$$

پویش علمی
ماندگار البرز

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

(۱۵) اگر m و n دو عدد طبیعی و a و b دو عدد صحیح باشند و $a \equiv b^m$ ، نشان دهید $a^n \equiv b^n$.

$$a \equiv b^m \Rightarrow m \mid a - b \quad \overbrace{a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})} \rightarrow$$

$$m \mid (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \Rightarrow m \mid a^n - b^n$$

$$\Rightarrow a^n \equiv b^n$$



پویش علمی
ماندگار البرز



محاسبه باقی‌مانده تقسیم به کمک همنهشتی

اگر باقی‌مانده تقسیم a بر m مساوی r باشد، سپس $a \equiv r \pmod{m}$.



پویش علمی
ماندگار البرز

۱۶) باقی‌مانده تقسیم $A = 6^{3^{14}} + 1$ را بر ۱۶ به دست آورید.

$$6^3 \equiv_{16} 15 \equiv_{16} 15 - 16 = -1 \Rightarrow 6^3 \equiv_{16} -1 \xrightarrow{\text{توان ۱۴}} 6^{3^{14}} \equiv_{16} (-1)^{14}$$

$$\Rightarrow 6^{3^{14}} \equiv_{16} 1 \xrightarrow{+1} 6^{3^{14}} + 1 \equiv_{16} 1 + 1 \Rightarrow A \equiv_{16} 2 \rightarrow r = 2$$

۱۷) باقی‌مانده تقسیم 7^{30} را بر ۱۵ به دست آورید.

$$7^{30} \equiv_{15} ? \quad \left| \begin{array}{l} 7^2 = 49 \equiv_{15} 4 \xrightarrow{\text{توان ۲}} (7^2)^2 \equiv_{15} 4^2 \rightarrow 7^4 \equiv_{15} 16 \\ 16 \equiv_{15} 1 \rightarrow 7^4 \equiv_{15} 1 \xrightarrow{\text{توان ۷}} 7^{28} \equiv_{15} 1 \xrightarrow{\times 7^2} 7^{30} \equiv_{15} 49 \equiv_{15} 4 \end{array} \right. \Rightarrow r = 4$$



$$973 = 3 + 7 \times 10 + 9 \times 10^2$$

تعیین باقی‌مانده بر ۳ یا ۹ به کمک هم‌نهشتی

برای تعیین باقی‌مانده یک عدد بر ۳ یا ۹، کافیهست باقی‌مانده مجموع ارقام آن را بر ۳ یا ۹ حساب کنیم، یعنی:

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0}^{3,9} \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

۱۸) نشان دهید باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۹، برابر با باقی‌مانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹ می‌باشد.

$$(حکم) \quad \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^9 \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

$$\text{اثبات:} \quad \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_0 + 10^1 a_1 + \dots + 10^n a_n \quad \begin{array}{l} 10 \equiv 1 \text{ (mod 9)} \\ 10^k \equiv 1 \end{array}$$

$$\stackrel{10}{\equiv} a_0 + 1a_1 + \dots + 1a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$



پویش علمی
ماندگارالبرز



تعیین باقی‌مانده بر ۱۱ به کمک هم‌نهشتی

برای تعیین باقی‌مانده یک عدد بر ۱۱، کافیهست باقی‌مانده مجموع ارقام آن را با علامت‌های یکی در میان مثبت و منفی، بر ۱۱ به دست آوریم، یعنی:

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0}^{11} \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n$$

تعیین باقی‌مانده بر ۱۰ به کمک هم‌نهشتی

باقی‌مانده یک عدد بر ۱۰، برابر با رقم یکان آن عدد می‌باشد.

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0}^{10} \equiv a_0$$



پویش علمی
ماندگارالبرز



تعیین رقم یکان به کمک هم‌نهشتی

پویش علمی
ماندگار البرز

برای تعیین رقم یکان عدد N ، باید معادله هم‌نهشتی $N \equiv ? \pmod{10}$ را حل کنیم و به جای $?$ ، کوچک‌ترین عدد مثبت را به دست آوریم.

۱۹ رقم یکان $2^{11} + 7$ را به دست آورید. $? \equiv 2^{11} + 7 \pmod{10}$: حکم

$$2^5 = 32 \equiv 2 \pmod{10} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (2^5)^2 \equiv 2^2 \pmod{10} \xrightarrow{\times 2} 2^{10} \equiv 4 \pmod{10}$$

$$2^{11} \equiv 8 \pmod{10} \xrightarrow{+7} 2^{11} + 7 \equiv 8 + 7 = 15 \equiv 5 \pmod{10} \Rightarrow \boxed{r=5}$$

(۲۰) رقم یکان عدد $A = 2! + 4! + \dots + 100!$ را به دست آورید.

$A \equiv ? \pmod{10}$: کم

$$2! = 1 \times 2 = 2 \equiv 2 \pmod{10}$$

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 \equiv 4 \pmod{10}$$

$$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \equiv 0 \pmod{10} \quad \text{و}$$

$\vdots$

$$100! = 1 \times 2 \times \dots \times 100 \equiv 0 \pmod{10}$$

$$\oplus \rightarrow 2! + 4! + \dots + 100! \equiv 2 + 4 + \dots + 0 \pmod{10}$$

$$\rightarrow A \equiv 6 \pmod{10} \rightarrow r = 6$$



پویش علمی
ماندگار البرز





کاربرد هم‌نهشتی در تقویم نگاری

$$-169 \checkmark \equiv \underbrace{v(25)}_{175} - 169 \checkmark \equiv \textcircled{6} \rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} \text{شنبه} & \text{یکشنبه} & \text{دوشنبه} & \text{آذر} \\ \hline 0 & 1 & 2 & \dots \end{array}$$

(۲۱) اگر ۲۵ خرداد در یک سال یکشنبه باشد، ۱۰ آذرماه در همان سال چه روزی در هفته است؟

$$d = 6 + 3(31) + 2(30) + 10 = 169$$

فاصله بین ۲۵ خرداد و ۱۰ آذر: $d = 6 + 3(31) + 2(30) + 10 = 169$

↓ روزهای هر هفته خرداد ↓ روزهای هر هفته خرداد ↓ روزهای هر هفته خرداد ↓ آذر

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 24 \\ \hline 676 \\ 1344 \\ \hline 4056 \end{array}$$

→ $\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \text{شنبه} & \text{یکشنبه} & \text{دوشنبه} & \text{سه‌شنبه} & \text{چهارشنبه} & \text{پنجشنبه} & \text{جمعه} \\ \hline 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$

۱۰ آذر، روز دوشنبه است.

معادله هم‌نهشتی و معادله سیاله

(۲۲) جواب‌های عمومی معادله سیاله $3x \equiv 50 - 2x \pmod{11}$ را به دست آورید.

$$3x \equiv 50 - 2x \pmod{11} \rightarrow 3x + 2x \equiv 50 \pmod{11} \rightarrow 5x \equiv 50 \pmod{11} \xrightarrow{\div 5}$$

$$\begin{array}{c} 11 \\ (5, 11) \end{array} \quad x \equiv 10 \pmod{11} \rightarrow x \equiv 10 \pmod{11} \rightarrow x = 11k + 10 \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$



پویش علمی
ماندگار البرز



۲۳) شخصی در مسابقه پرتاب دارت، در هر پرتاب ۷ یا ۹ و در مجموع ۱۸۳ امتیاز کسب کرده است. حداکثر تعداد پرتاب‌های ۹ امتیازی او را تعیین کنید.

$$\begin{cases} x = \text{تعداد پرتاب ۹ امتیازی} \\ y = \text{تعداد پرتاب ۷ امتیازی} \end{cases} \rightarrow 9x + 7y = 183 \rightarrow 9x \equiv 183 \begin{matrix} 9 \equiv 2 \\ 183 \equiv 1 \end{matrix}$$



پویش علمی
ماندگار البرز



$$2x \equiv 1 \Rightarrow 2x \equiv 1 + 7 = 8 \xrightarrow{\div 2} x \equiv 4 \xrightarrow{(2,7)} x \equiv 4 \rightarrow \boxed{x = 7k + 4}$$

جایگزینی $9(7k + 4) + 7y = 183 \rightarrow 7y = 183 - 63k - 36 \rightarrow 7y = 147 - 63k$

$$\xrightarrow{\div 7} y = 21 - 9k \rightarrow \begin{cases} x = 7k + 4 \\ y = 21 - 9k \end{cases} \xrightarrow{x, y \geq 0} \begin{cases} k=0 \rightarrow x=4, y=21 \\ k=1 \rightarrow x=11, y=12 \\ k=2 \rightarrow x=18, y=3 \end{cases} \rightarrow \boxed{\text{Max}(x) = 18}$$